

INTÉGRALES DOUBLES

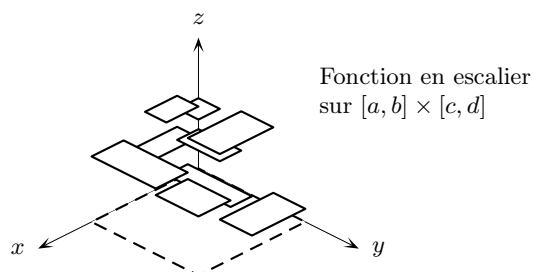
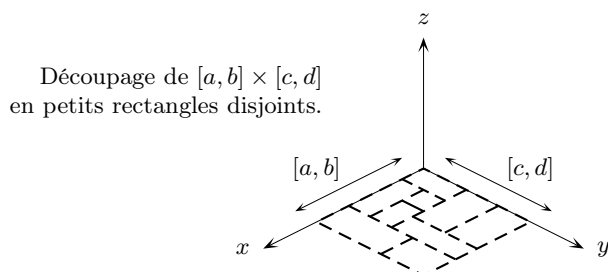
Les résultats de ce chapitre seront tous énoncés sans démonstration aucune. La construction de l'intégrale double notamment sera admise.

Dans tout ce chapitre, a, b, c, d sont des réels tels que $a \leq b$ et $c \leq d$.

1 INTÉGRALE DOUBLE SUR UN RECTANGLE

La construction de l'intégrale double sur un rectangle $[a, b] \times [c, d]$ ressemble de près à la construction de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Pour votre culture, signalons rapidement les étapes de cette construction.

- On commence par définir la notion de fonction en escalier sur $[a, b] \times [c, d]$. Un découpage de $[a, b] \times [c, d]$ en petits rectangles disjoints de taille quelconque étant donné, une fonction en escalier sur $[a, b] \times [c, d]$ est alors par définition constante sur chaque petit rectangle ouvert.



- On définit alors la notion d'intégrale d'une fonction en escalier sur $[a, b] \times [c, d]$: au lieu de sommer des aires de petits rectangles, on somme ici des volumes de petits parallélépipèdes. On vérifie que l'intégrale ainsi définie est linéaire, positive. . . Précisément, l'intégrale de la fonction constante égale à 1 sur $[a, b] \times [c, d]$ est par définition égale au volume du parallélépipède rectangle de base $[a, b] \times [c, d]$ et de hauteur 1 : $\iint_{[a, b] \times [c, d]} dx dy = (b - a)(d - c)$. Plus généralement, les intégrales doubles s'interprètent comme des volumes (algébriques).
- On définit ensuite la notion de fonction continue par morceaux sur $[a, b] \times [c, d]$. Un découpage de $[a, b] \times [c, d]$ en petits rectangles disjoints de taille quelconque étant donné, une fonction continue par morceaux sur $[a, b] \times [c, d]$ est alors par définition continue sur chaque petit rectangle ouvert, prolongeable par continuité sur chaque petit rectangle fermé.
- On montre alors qu'on peut approximer toute fonction continue par morceaux sur $[a, b] \times [c, d]$ par des fonctions en escalier aussi précisément que nécessaire. Il faut ici utiliser un théorème de Heine pour les fonctions de deux variables, issu d'un théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
- Ce théorème d'approximation permet alors une définition complète de la notion d'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $[a, b] \times [c, d]$. On montre également que l'intégrale ainsi définie est linéaire, positive. . .

Cela dit, dans ce chapitre, nous nous contenterons d'étudier les intégrales doubles de fonctions continues — conformément au programme.

Théorème (Intégrale double sur un rectangle) On peut associer à toute fonction $f \in \mathcal{C}([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})$ un réel noté $\iint_{[a, b] \times [c, d]} f$ ou $\iint_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) \, dx \, dy$ jouissant des propriétés suivantes ; pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})$:

- **Linéarité** : Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: $\iint_{[a, b] \times [c, d]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_{[a, b] \times [c, d]} f + \mu \iint_{[a, b] \times [c, d]} g$.
- **Positivité** : Si $f \geq 0$, alors $\iint_{[a, b] \times [c, d]} f \geq 0$. **Croissance** : Si $f \leq g$, alors $\iint_{[a, b] \times [c, d]} f \leq \iint_{[a, b] \times [c, d]} g$.
- **Continuité** : $\left| \iint_{[a, b] \times [c, d]} f \right| \leq \iint_{[a, b] \times [c, d]} |f|$.
- **Théorème de Fubini** : $\iint_{[a, b] \times [c, d]} f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy$.
- **Additivité par rapport au domaine d'intégration** : Si $u \in [a, b]$ et $v \in [c, d]$:

$$\iint_{[a, b] \times [c, d]} f = \iint_{[a, u] \times [c, d]} f + \iint_{[u, b] \times [c, d]} f \quad \text{et} \quad \iint_{[a, b] \times [c, d]} f = \iint_{[a, b] \times [c, v]} f + \iint_{[a, b] \times [v, d]} f.$$

🐇 🐇 🐇 Explication

- La propriété d'additivité par rapport au domaine d'intégration est l'analogue à deux variables de la relation de Chasles.
- Le théorème de Fubini sous-entend, pour avoir un sens, que les applications $x \mapsto \int_c^d f(x, y) \, dy$ et $y \mapsto \int_a^b f(x, y) \, dx$ définies sur $[a, b]$ et $[c, d]$ respectivement sont continues.

🐇 🐇 🐇 **En pratique** La propriété la plus importante pour le calcul effectif des intégrales doubles est le théorème de Fubini selon lequel toute intégrale double n'est qu'un empilement de deux intégrales simples.

Exemple $\iint_{[0, 1] \times [0, 2\pi]} (x + \sin y) \, dx \, dy = \pi.$

En effet Calculons cette intégrale de deux façons pour illustrer la validité du théorème de Fubini.

$$\iint_{[0, 1] \times [0, 2\pi]} (x + \sin y) \, dx \, dy \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (x + \sin y) \, dy \right) dx = \int_0^1 [xy - \cos y]_{y=0}^{y=2\pi} dx = \int_0^1 2\pi x \, dx = \pi$$

$$\text{et} \quad \iint_{[0, 1] \times [0, 2\pi]} (x + \sin y) \, dx \, dy \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (x + \sin y) \, dx \right) dy = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \sin y \right) dy = \pi.$$

Exemple Soient $\varphi \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $\psi \in \mathcal{C}([c, d], \mathbb{R})$. On pose, pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$: $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$. Nous savons que $f \in \mathcal{C}([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})$. Alors : $\iint_{[a, b] \times [c, d]} f = \iint_{[a, b] \times [c, d]} \varphi(x)\psi(y) \, dx \, dy = \left(\int_a^b \varphi \right) \left(\int_c^d \psi \right)$.

En effet
$$\begin{aligned} \iint_{[a, b] \times [c, d]} f &= \iint_{[a, b] \times [c, d]} \varphi(x)\psi(y) \, dx \, dy \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_a^b \left(\int_c^d \varphi(x)\psi(y) \, dy \right) dx \\ &= \underbrace{\int_a^b \varphi(x) \left(\int_c^d \psi(y) \, dy \right) dx}_{\varphi(x) \text{ ne dépend pas de } y} = \underbrace{\left(\int_c^d \psi(y) \, dy \right)}_{\text{scalaire}} \int_a^b \varphi(x) dx = \left(\int_a^b \varphi \right) \left(\int_c^d \psi \right). \end{aligned}$$

Exemple $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} \, dx = \ln 2.$

En effet

- La fonction $x \mapsto \frac{x-1}{\ln x}$ est continue sur $]0, 1[$, prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{\ln x} = 0$ et prolongeable également en 1 par la valeur 1 car $\ln x \underset{x \rightarrow 1}{\sim} (x-1)$. Ceci justifie l'existence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} \, dx$.

- Nous allons calculer cette intégrale au moyen d'une intégrale double qui en apparence n'a aucun rapport avec elle. Soit $\varepsilon \in]0, 1]$. La fonction $(x, y) \mapsto x^y = e^{y \ln x}$ est clairement continue sur $[\varepsilon, 1] \times [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \iint_{[\varepsilon, 1] \times [0, 1]} x^y \, dx \, dy &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\varepsilon}^1 \left(\int_0^1 e^{y \ln x} \, dy \right) dx = \int_{\varepsilon}^1 \left[\frac{e^{y \ln x}}{\ln x} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_{\varepsilon}^1 \frac{x-1}{\ln x} \, dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \left(\int_{\varepsilon}^1 x^y \, dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_{x=\varepsilon}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{dy}{y+1} - \int_0^1 \frac{\varepsilon^{y+1}}{y+1} \, dy \\ &= [\ln(y+1)]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \frac{\varepsilon^{y+1}}{y+1} \, dy = \ln 2 - \int_0^1 \frac{\varepsilon^{y+1}}{y+1} \, dy. \end{aligned}$$

Nous venons donc de montrer la formule : $\int_{\varepsilon}^1 \frac{x-1}{\ln x} \, dx = \ln 2 - \int_0^1 \frac{\varepsilon^{y+1}}{y+1} \, dy$.

- Or : $0 \leq \int_0^1 \frac{\varepsilon^{y+1}}{y+1} \, dy \leq \varepsilon \int_0^1 \frac{dy}{y+1} = \varepsilon \ln 2$. D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{\varepsilon^{y+1}}{y+1} \, dy = 0$, ce qui nous donne aussitôt le résultat souhaité.

2 INTÉGRALES DOUBLES SUR UN DOMAINE BORNÉ DÉFINI PAR DES CONDITIONS SIMPLES

Pour le moment, nous avons seulement défini l'intégrale double d'une fonction de deux variables sur un rectangle. Mais en réalité on peut intégrer une telle fonction sur bien d'autres domaines : disques, ellipses, triangles, patates gentilles, etc. Notre objectif n'est pas ici de donner une définition précise des domaines autorisés : la définition suivante, quoique restreinte, nous fournira déjà un lot suffisant d'exercices.

Théorème (Intégrale double sur un domaine défini par des conditions simples) Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ telles que $\varphi \leq \psi$. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ et } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$.

On peut associer à toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ un réel noté $\iint_{\mathcal{D}} f$ ou $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy$ jouissant des propriétés suivantes ; pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$:

- **Linéarité** : Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: $\iint_{\mathcal{D}} (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_{\mathcal{D}} f + \mu \iint_{\mathcal{D}} g$.
- **Positivité** : Si $f \geq 0$, alors $\iint_{\mathcal{D}} f \geq 0$. **Croissance** : Si $f \leq g$, alors $\iint_{\mathcal{D}} f \leq \iint_{\mathcal{D}} g$.
- **Continuité** : $\left| \iint_{\mathcal{D}} f \right| \leq \iint_{\mathcal{D}} |f|$.
- **Théorème de Fubini** : $\iint_{\mathcal{D}} f = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$.
- **Additivité par rapport au domaine d'intégration** : Si $\mathcal{D}$ est décomposé en deux domaines disjoints $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sur lesquels l'intégrale double de f est définie : $\iint_{\mathcal{D}} f = \iint_{\mathcal{E}} f + \iint_{\mathcal{F}} f$.

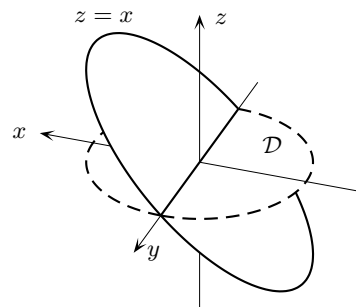
On dispose d'une définition et de résultats analogues dans le cas où $\varphi, \psi \in \mathcal{C}([c, d], \mathbb{R})$ avec $\varphi \leq \psi$ et où $\mathcal{D}$ est l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d \text{ et } \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$.

 **En pratique** La propriété la plus importante pour le calcul effectif des intégrales doubles est le théorème de Fubini selon lequel toute intégrale double n'est qu'un empilement de deux intégrales simples.

Exemple On pose $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$ — le « disque trigonométrique ».

Alors : $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy = 0$.

Ce résultat paraît naturel sur la figure ci-contre, car la portion « positive » du volume considéré est annulée exactement par sa portion « négative ».

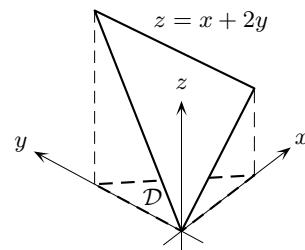


En effet Tout d'abord : $\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq y \leq 1 \text{ et } -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \right\}$. Du coup :

$$\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx \right) dy = \int_{-1}^1 0 \, dx = 0 \quad \text{par imparité de la fonction } x \mapsto x.$$

Exemple On pose $\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1-x \right\}$. Alors : $\iint_{\mathcal{D}} (x+2y) \, dx \, dy = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{En effet} \quad \iint_{\mathcal{D}} (x+2y) \, dx \, dy &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x+2y) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 [xy + y^2]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 (1-x) \, dx = \left[-\frac{(1-x)^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



3 CHANGEMENT DE VARIABLES

Il existe une formule générale du changement de variables pour les intégrales doubles, mais elle ne figure pas à notre programme. Cela dit, pour vous aider à comprendre les deux cas particuliers étudiés ci-après, énonçons sans ses hypothèses précises cette formule :

$$\iint_{\varphi(\mathcal{D})} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}} f(\varphi(u, v)) |J_{\varphi}(u, v)| \, du \, dv.$$

Dans cette formule, $\mathcal{D}$ est une partie de $\mathbb{R}^2$. Quant à φ , c'est une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^2$ et si $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$,

alors par définition le *jacobien* J_{φ} de φ est le déterminant : $J_{\varphi} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$. Enfin, f est une application de $\varphi(\mathcal{D})$ dans $\mathbb{R}$.

Notez bien que, dans la formule du changement de variables, $|J_{\varphi}|$ est la valeur absolue du déterminant J_{φ} et non ce déterminant lui-même.

Nous ne donnerons qu'un seul exemple explicite de changement de variables : celui consistant à passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires.

Théorème (Changement de variables coordonnées cartésiennes/coordonnées polaires) Soient $\mathcal{D}$ une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ « définie par des conditions simples » et $f \in \mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$. Alors :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{E}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta,$$

où $\mathcal{E}$ est une partie de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ telle que l'application $(r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ soit bijective de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{D}$.

🔗 🔗 🔗 **Explication** C'est bien la formule générale du changement de variables, avec $\varphi : (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Pour tout $(r, \theta) \in \mathcal{E}$: $J_{\varphi}(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$, de sorte que : $|J_{\varphi}(r, \theta)| = |r| = r$ car $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

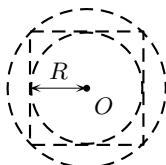
Exemple $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss).

En effet L'astuce de cet exemple consiste à étudier l'intégrale $\iint_{[-R, R]^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy$ pour tout $R \in \mathbb{R}_+$, puis à faire tendre R vers ∞ .

• Soit $R \in \mathbb{R}_+$. Alors : $\iint_{[-R, R]^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy = \iint_{[-R, R]^2} e^{-x^2} e^{-y^2} \, dx \, dy \stackrel{\text{Fubini}}{=} \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} \, dx \right)^2$ ♣.

• Or on a l'inclusion : $BF(O, R) \subseteq [-R, R]^2 \subseteq BF(O, R\sqrt{2})$. La fonction $(x, y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$ étant positive, la propriété d'additivité par rapport au domaine d'intégration nous donne alors l'inégalité :

$$\iint_{BF(O, R)} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy \leq \iint_{[-R, R]^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy \leq \iint_{BF(O, R\sqrt{2})} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy \quad \spadesuit.$$



- Utilisons à présent la formule de changement de variables coordonnées cartésiennes/coordonnées polaires. L'application $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ transforme $[0, R] \times [0, 2\pi]$ en $BF(O, R)$.

$$\iint_{BF(O, R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \iint_{[0, R] \times [0, 2\pi]} e^{-r^2} r dr d\theta \stackrel{\text{Fubini}}{=} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^R r e^{-r^2} dr \right) = 2\pi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_{r=0}^{r=R} = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

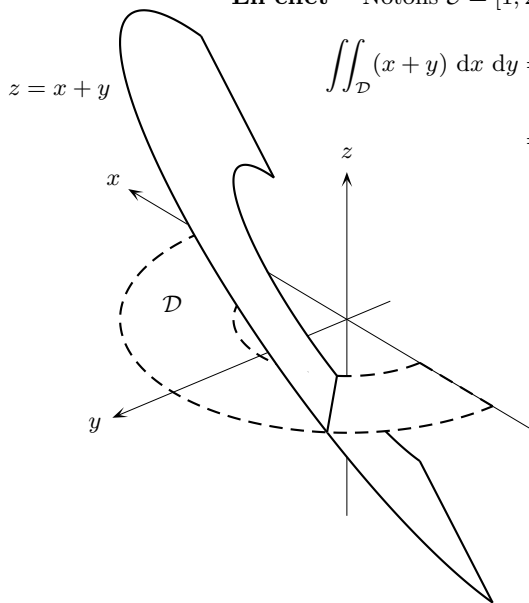
Par conséquent : $\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{BF(O, R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi$. De même pour $\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{BF(O, R\sqrt{2})} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$.

- Finalement, le théorème des gendarmes appliqué à $\spadesuit$ montre que : $\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{[0, R]^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi$.

Avec $\clubsuit$ nous obtenons le résultat voulu : $\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi$.

Exemple On pose $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0 \text{ et } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Alors : $\iint_{\mathcal{D}} (x+y) dx dy = \frac{14}{3}$.

En effet Notons $\mathcal{E} = [1, 2] \times [0, \pi]$. Alors l'application $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ est bijective de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{D}$.



$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} (x+y) dx dy &= \iint_{[1, 2] \times [0, \pi]} (r \cos \theta + r \sin \theta) r dr d\theta = \left(\int_1^2 r^2 dr \right) \left(\int_0^\pi (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \right) \\ &= \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=1}^{r=2} \times [\sin \theta - \cos \theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{7}{3} \times 2 = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$